Estratto dal *Bollettino della Unione Matematica Italiana*
Dicembre 1954 - Serie III, Anno IX, Num. 4

CARLO FELICE MANARA

Cubica equianarmonica legata ad una terna di E_1

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA

Estratto dal *Bollettino della Unione Matematica Italiana*
dicembre 1954 - Serie III, Anno IX, Num. 4

Cubica equianarmonica legata ad una terna di E_1.

Nota di CARLO FELICE MANARA (a Modena).

Santo. - *Si dimostra la esistenza di una cubica equianarmonica razionalmente legata alla configurazione di una terna di* E_1 *piani; si fa applicazione delle proprietà trovate alla caratterizzazione delle terne di* E_2 *piani, in particolare alle terne appartenenti a fasci di cubiche.*

1. Nella presente Nota dimostriamo l'esistenza di una cubica equianarmonica razionalmente legata ad una terna di E_1 in modo covariante proiettivo.

Di essa ci serviamo per la costruzione di un sistema completo di invarianti proiettivi atti a caratterizzare le terne di E_2 nel piano. Come esempio di applicazione degli invarianti costruiti determiniamo poi le condizioni di carattere proiettivo differenziale cui deve soddisfare una terna di E_2 non indipendenti, nel senso che offrono condizioni non indipendenti alle cubiche che li contengono.

La presente ricerca si ricollega sia alle mie ricerche sulla caratterizzazione delle curve W dello spazio, attraverso invarianti proiettivi legati a terne di loro elementi differenziali [1], sia alle ricerche di P. BUZANO [2] sulle terne di E_1 nel piano proiettivo.

2. Siano dunque, in un piano π, tre punti A, B, C e tre rette a, b, c passanti rispettivamente per A, B, C.

In tutta la presente trattazione supporremo che tanto il triangolo ABC che il trilatero abc siano effettivi e non degeneri: supporremo inoltre che per ogni vertice del triangolo ABC passi un solo lato del trilatero abc.

Consideriamo ora i tre E_1 che hanno come centri i tre punti A, B, C e come tangenti le rette omonime: li indicheremo rispettivamente con i simboli (A, a), (B, b), (C, c).

Consideriamo infine il punto A', intersezione della retta a con la retta BC; avremo analogamente un punto B' ed un punto C'.

(1) C. F. MANARA, *Invarianti proiettivi differenziali nello spazio e curve W*, «Boll. U. M. I.», (1954).

(2) P. BUZANO, *Sull'invariante proiettivo di una terna di elementi curvilinei del I° ordine*, «Boll. U. M. I.», (1941).

Come è noto, il prodotto k dei tre rapporti semplici

$$k = (ABC')(BCA')(CAB') \tag{1}$$

è un invariante proiettivo della configurazione dei tre E_1; inoltre esso è atto a caratterizzare la configurazione stessa, la quale ammette ovviamente un solo invariante proiettivo.

È pure noto che il valore $k = 1$ dell'invariante k corrisponde alla circostanza geometrica che i tre E_1 appartengano ad una stessa conica, mentre il valore $k = -1$ corrisponde al fatto che le tre rette a, b, c appartengano ad uno stesso fascio; pertanto, poichè abbiamo escluso che quest'ultima circostanza possa verificarsi, resterà escluso in tutta la presente trattazione che k possa assumere il valore -1.

3. Lemma 1. - Esiste una omografia non omologica, ciclica del III° ordine che permuta ciclicamente i tre E_1: (A, a), (B, b), (C, c).

Tale è evidentemente la omografia ω determinata dalle condizioni di portare A in B, B in C, C in A e il punto comune alle rette a, b nel punto comune alle b, c.

Osservazione 1. - Non esistono omografie cicliche del terzo ordine, oltre a quelle del gruppo ciclico G_3 determinato da ω, che mutino la configurazione dei tre E_1 in sè.

Osservazione 2. - Ovviamente nessuno dei punti uniti del gruppo G_3 appartiene ai lati del triangolo ABC nè a quelli del trilatero abc.

Consideriamo ora il fascio $|\mathfrak{C}|$ di cubiche, definito dalle due cubiche degeneri l'una nei lati del triangolo ABC, l'altra in quelli del trilatero abc; ogni cubica di esso contiene i tre E_1 dati e passa per i punti A', B', C'.

Osservazione 3. - Le cubiche del fascio $|\mathfrak{C}|$ hanno modulo variabile con il parametro del fascio stesso. Consideriamo infatti le tangenti uscenti ad una cubica per il punto base A'; nel caso della cubica degenere nel trilatero abc esse coincidono a coppie e quindi il loro birapporto possiede uno dei valori ∞, 0, 1. Se dunque tutte le cubiche del nostro fascio avessero modulo costante esse dovrebbero essere tutte nodate e quindi dovrebbero tutte passare doppiamente per un punto base, contro le nostre ipotesi.

Lemma 2. - Ogni cubica del fascio $|\mathfrak{C}|$ è mutata in sè dalle omografie del gruppo G_3 generato da ω.

Infatti la ω muta in sè singolarmente le due cubiche degeneri che abbiamo assunto a definire il fascio; inoltre muta in sè la cubica di $|\mathfrak{C}|$ passante per un punto unito di G_3 ed ovviamente distinta dalle prime due. Dunque muta in sè singolarmente ogni cubica di $|\mathfrak{C}|$ perchè lascia ferme almeno tre cubiche distinte di esso.

Indichiamo ora con U, V, W i tre punti uniti (distinti) del gruppo G_3. Sussiste il

LEMMA 3. – Il trilatero avente come vertici i tre punti U, V, W uniti per il gruppo G_3 è trilatero di MAC LAURIN [3] per tutte le cubiche del fascio $|\mathfrak{C}|$.

Infatti è noto che il più ampio gruppo di omografie che mutano in sè una cubica generica è un gruppo di 18 omografie e che le sole omografie cicliche del terzo ordine contenute in esso sono quelle che mutano in sè un trilatero di MAC LAURIN ed hanno i suoi vertici come punti uniti.

Sussiste ora il

TEOREMA – *Esiste una cubica* Φ *equianarmonica, razionalmente determinata dalla configurazione dei tre* E_1: (A, a), (B, b), (C, c).

Infatti consideriamo il fascio $|\mathfrak{C}|$ sopra definito (nel quale troveremo la Φ) ed uno dei lati del triangolo dei punti uniti di G_3, per es. il lato UV; in forza di ciò che è stato detto fin qui, i punti in cui esso interseca una cubica generica di $|\mathfrak{C}|$ sono flessi per essa ed appartengono ad una g^1_3 ciclica, avente come punti tripli i punti U e V; precisamente quella g^1_3 che contiene i cicli delle proiettività subordinata dalla ω sulla retta UV. Le tangenti inflessionali secano su un altro lato del triangolo, per es. sul lato UW, i gruppi della analoga g^1_3 ciclica, contenente i cicli della proiettività subordinata dalla ω sulla retta UW.

Esiste quindi almeno una cubica Φ del fascio $|\mathfrak{C}|$ per la quale una tangente inflessionale passa per W: di conseguenza allora anche quelle relative agli altri due flessi giacenti sulla retta UV passano per W e quindi la cubica Φ è equianarmonica. Inoltre essa è unica nel fascio $|\mathfrak{C}|$ perchè dalla esistenza di un'altra cubica Φ' equianarmonica ed avente le tangenti inflessionali passanti a terne per i punti U, V, W seguirebbe che tutte le cubiche di $|\mathfrak{C}|$ sarebbero equianarmoniche; ma ciò è impossibile perchè, come è noto, ogni cubica cosiffatta appartiene alla rete che si ottiene combinando linearmente i tre lati del trilatero di MAC LAURIN contati tre volte ed in una rete di tale tipo non esistono cubiche degeneri in trilateri a vertici distinti.

Quindi la Φ così determinata è unica nel fascio e di conseguenza funzione razionale di questo.

(3) Cioè un trilatero i cui lati passano per tutti i flessi di una cubica.

Essendo poi quest'ultimo funzione razionale della configurazione dei tre E_1 dati, risulta in definitiva la Φ determinata razionalmente dalla configurazione suddetta [4].

4. Possiamo anche confermare i risultati della analisi sintetica ora conclusa con un calcolo che qui svolgiamo a preparazione della trattazione successiva.

Riferito il piano π a coordinate cartesiane X, Y, è sempre possibile, stante la riconosciuta invarianza proiettiva delle proprietà che si tratta di verificare, assumere il punto A nell'origine del sistema di coordinate, il punto B nel punto improprio dell'asse X, il punto C nel punto improprio dell'asse delle Y, il punto comune alle rette b e c nel punto di coordinate $X = -1$ $Y = -1$. Allora le rette a, b, c vengono rappresentate dalle equazioni

$$a \equiv \{ kX + Y = 0 \}$$

$$b \equiv \{ Y + 1 = 0 \}$$

$$c \equiv \{ X + 1 = 0 \}$$

nelle quali il parametro k ha il significato proiettivo definito dalla (1). Introdotte coordinate omogenee x, y, z, legate alle X ed Y dalle relazioni

$$X = x/z \quad ; \quad Y = y/z$$

le equazioni della omografia ω sono le seguenti

$$\rho x' = z \quad ; \quad \rho y' = kx \quad ; \quad \rho z' = y.$$

Il fascio di cubiche $\{ \mathfrak{C} \}$ è rappresentato dalla equazione

$$(Y + 1)(Y + kX)(X + 1) + tXY = 0 \tag{2}$$

essendo t il parametro; e si verifica allora facilmente che la omografia ω muta in sè ogni cubica del fascio.

Scriviamo la equazione (2) nella forma

$$(1 + X)Y^2 + Y[kX^2 + X(1 + k + t) + 1] + kX(1 + X) = 0: \tag{3}$$

come è noto, la equazione complessiva della quaterna di tangenti parallele all'asse delle Y si ottiene uguagliando a zero il discriminante della (3) considerata come equazione in Y, ossia è data dalla equazione

$$[kX^2 + X(1 + k + t) + 1]^2 - 4kX(1 + X)^2 = 0. \tag{4}$$

[4] Di qui segue anche che la Φ non dipende dalla scelta del lato del triangolo $U\ V\ W$ a cui abbiamo fatto ricorso per determinarla: il che si vede anche direttamente, in quanto le nove tangenti inflessionali passano a terne per i vertici del triangolo.

La condizione perchè la cubica (3) e quindi la quaterna (4) sia equianarmonica si scrive uguagliando a zero l'invariante i della equazione (4), il che conduce alla equazione in t

$$(t+1+k)[(t+1+k)^3 - 24k(t+1+k) + 24k(1+k)] = 0.$$

Si ha pertanto che esiste una cubica equianarmonica, e precisamente quella corrispondente al valore $t = -1-k$, che è razionalmente determinata nel fascio. Notiamo d'altra parte che la ricerca delle altre tre conduce alla risoluzione di una equazione di terzo grado in t che è a gruppo totale, come si verifica con i noti procedimenti.

Risulta così verificato che esiste nel fascio $\{\mathfrak{C}\}$ una cubica equianarmonica razionalmente nota in funzione dei dati, cioè dei tre E_1 (A, a), (B, b), (C, c); essa è data dalla equazione

$$(1+X)^2 + (kX^2+1)Y + kX(1+X) = 0. \tag{5}$$

Segue che questa coincide con la cubica Φ sinteticamente determinata nel precedente paragrafo. Di questa coincidenza si potrebbe dare una analoga verifica.

5. Ciò che precede può essere collegato in modo notevole alla teoria delle terne di E_2 nel piano proiettivo.

Consideriamo infatti tre distinti E_2, ciascuno dei quali contenga uno degli E_1 assegnati; la loro configurazione è caratterizzata da quattro invarianti proiettivi, come risulta da un immediato computo di costanti.

Uno di questi invarianti è chiaramente l'invariante k sopra definito in (1) e che caratterizza la terna di E_1; la costruzione degli altri può essere fatta qualora si determini per ciascuno degli E_1 un E_2 proiettivamente covariante della terna di E_1. Infatti ogni altro E_2 avente lo stesso E_1 è allora determinato in base al noto invariante di Mehmke-Segre (rapporto delle due curvature).

Orbene la cubica equianarmonica Φ, la cui esistenza è stata dimostrata nei precedenti paragrafi, fornisce nel modo più naturale per ogni E_1 un E_2 di riferimento, funzione razionale della configurazione dei tre E_1.

La quaterna di invarianti così introdotta fornisce una quaterna di coordinate proiettive della terna di E_2; esse sono poi suscettibili di una suggestiva rappresentazione geometrica qualora si interpretino i tre invarianti di Mehmke-Segre relativi ai tre E_2 come coordinate cartesiane o proiettive di punto in uno spazio ausiliario S.

Di conseguenza, fissato il valore di k, cioè fissata una terna di E_1, ad ogni terna di E_2 aventi quei dati E_1 corrisponde un punto di S; a terne di E_2 soddisfacenti a particolari condizioni corrisponderanno delle varietà M di S.

Faremo applicazione di questi concetti alla caratterizzazione delle terne di E_2 del piano proiettivo che appartengono a fasci di cubiche. A tal fine consideriamo il sistema lineare Σ triplamente infinito di cubiche contenenti i tre E_1: (A, a), (B, b), (C, c).

Esso può ottenersi combinando linearmente la cubica degenere nel triangolo ABC con le tre cubiche degeneri rispettivamente nella retta a e nel lato BC contato due volte, nella retta b e nel lato AC contato due volte, nella retta c e nel lato AB contato due volte.

Con i riferimenti e le notazioni introdotte al precedente paragrafo il sistema lineare Σ ammette la rappresentazione

$$XY + \lambda(Y + kX) + \mu k(Y+1)X^2 + \nu Y^2(X+1) = 0 \tag{6}$$

essendo λ, μ, ν i parametri lineari che determinano la cubica nel sistema.

Indichiamo con J_a il rapporto delle curvature della cubica (6) e della Φ in A. Per calcolarlo osserviamo che la funzione algebrica $Y(X)$ definita dalla Φ nell'intorno del valore $X=0$ ammette la rappresentazione

$$Y = -kX - (k + k^2)X^2 + \ldots$$

e la funzione algebrica definita dalla (6) ammette la rappresentazione

$$X = -kX + \frac{k - \mu k - \nu k^2}{\lambda} X + \ldots$$

pertanto l'invariante J_a di MEHMKE-SEGRE nel punto A è dato dalla espressione

$$J_a = \frac{\nu k + \mu - 1}{\lambda(1+k)}. \tag{7}$$

Gli analoghi invarianti J_b ed J_c in B e C rispettivamente si ottengono ovviamente applicando la ω e permutando circolarmente le lettere λ, μ, ν; si hanno così le espressioni

$$J_b = \frac{\lambda k + \nu - 1}{\mu(1+k)} \tag{8}$$

$$J_c = \frac{\mu k + \lambda - 1}{\nu(1+k)}. \tag{9}$$

Pertanto la condizione che i tre E_2, caratterizzati dagli invarianti J_a, J_b, J_c e k, appartengano ad un fascio di cubiche si traduce nella condizione che le equazioni (7), (8), (9), considerate come equazioni lineari in λ, μ, ν non siano indipendenti.

Sotto altra forma il sistema può essere scritto come segue

$$\begin{cases} \lambda(1+k)J_a & -\mu & -\nu k & =-1 \\ -\lambda k & +\mu(1+k)J_b & -\nu & =-1 \\ -\lambda & -\mu k & +\nu J_c(1+k) & =-1 \end{cases}$$

e si tratta allora di scrivere che la matrice a tre righe e quattro colonne

$$\begin{Vmatrix} J_a(1+k) & -1 & -k & -1 \\ -k & J_b(1+k) & -1 & -1 \\ -1 & -k & J_c(1+k) & -1 \end{Vmatrix}$$

ha caratteristica due.

Si ottiene così il sistema di quattro equazioni, due sole delle quali sono indipendenti

$$\begin{cases} (1+k)^3 J_a J_b J_c - (1+k)k(J_a + J_b + J_c) - 1 - k^3 & = 0 \\ (1+k)^2 J_a J_b \quad + k(1+k)J_a \quad + (1+k)J_b + k^2 - k + 1 & = 0 \\ (1+k)^2 J_b J_c \quad + k(1+k)J_b \quad + (1+k)J_c + k^2 - k + 1 & = 0 \\ (1+k)^2 J_c J_a \quad + k(1+k)J_c \quad + (1+k)J_a + k^2 - k + 1 & = 0 \end{cases}$$

Le infinite terne di soluzioni delle equazioni ora scritte possono essere date in funzione di un parametro t nella forma

$$(10) \qquad \begin{cases} J_a = -\dfrac{t(1+k) + k^2 - k + 1}{t(1+k)^2 + k(1+k)} \\[2ex] J_b = -\dfrac{tk(1+k) + k^2 - k + 1}{t(1+k)^2 + (1+k)} \\[2ex] J_c = t. \end{cases}$$

Pertanto, riferendoci alla rappresentazione delle terne di E_2 (relative ad una data terna di E_1) con i punti di uno spazio S, potremo riassumere l'analisi svolta fin qui dicendo che le terne di E_2 legati dalla condizione algebrica di non offrire condizioni indipendenti alle cubiche che devono contenerli, sono i punti di una cubica gobba in S.

Così la varietà M delle terne di E_2 non indipendenti (relative ad una data terna di E_1) è una cubica gobba in S.